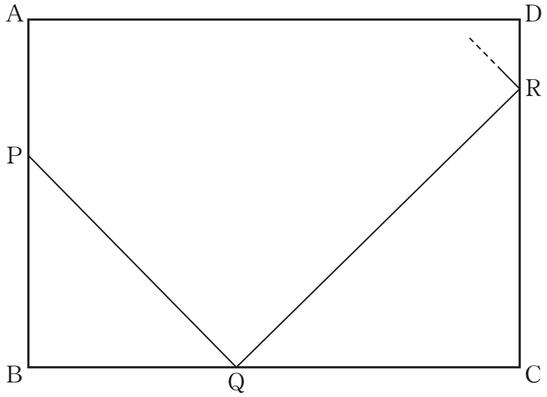
# 第２講　関数・データの分析

**1** $a$ を $5<a<10$ を満たす実数とする。長方形 ABCD を考え，AB＝CD＝5，BC＝DA＝$a$ とする。

次のようにして，長方形 ABCD の辺上に 4 点 P，Q，R，S をとり，内部に点 T をとることを考える。

辺 AB 上に点 B と異なる点 P をとる。辺 BC 上に点 Q を ∠BPQ が 45° になるようにとる。Q を通り，直線 PQ と垂直に交わる直線を $\ell$ とする。$\ell$ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるとき，$\ell$ と辺 CD の交点を R とする。

点 R を通り $\ell$ と垂直に交わる直線を $m$ とする。$m$ と辺 AD との交点を S とする。点 S を通り $m$ と垂直に交わる直線を $n$ とする。$n$ と直線 PQ との交点を T とする。



参考図

（次ページに続く。）

(1)　$a=6$ のとき，$\ell$ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるときの AP の値の範囲は

$0 \leqq \mathrm{AP} <$ ［ア］ である。このとき，四角形 QRST の面積の最大値は $\dfrac{［イウ］}{［エ］}$ である。

$a=8$ のとき，四角形 QRST の面積の最大値は ［オカ］ である。

(2)　$5<a<10$ とする。$\ell$ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるときの AP の値の範囲は

$0 \leqq \mathrm{AP} <$ ［キク］ $-a$ ……………①

である。

点 P が①を満たす範囲を動くとする。四角形 QRST の面積の最大値が $\dfrac{［イウ］}{［エ］}$ となるときの $a$ の値の範囲は

$5 < a \leqq \dfrac{［ケコ］}{［サ］}$

である。

$a$ が $\dfrac{［ケコ］}{［サ］} < a < 10$ を満たすとき，P が①を満たす範囲を動いたときの四角形 QRST の面積の最大値は

［シス］$a^2+$［セソ］$a-$［タチツ］

である。

**2**　花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。二人は１皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，１皿あたりの価格と売り上げ数の関係をまとめたものである。

| | | | |
|---|---|---|---|
| １皿あたりの価格(円) | 200 | 250 | 300 |
| 売り上げ数(皿) | 200 | 150 | 100 |

(1)　まず，二人は，上の表から，１皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考えて，売り上げ数が１皿あたりの価格の１次関数で表されると仮定した。このとき，１皿あたりの価格を $x$ 円とおくと，売り上げ数は

$$\boxed{\text{アイウ}}-x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と表される。

(2)　次に，二人は，利益の求め方について考えた。

花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
太郎：売り上げ金額は，１皿あたりの価格と売り上げ数の積で求まるね。
花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。材料費は，売り上げ数と１皿あたりの材料費の積になるね。

（次ページに続く。）

二人は，次の三つの条件のもとで，1 皿あたりの価格 $x$ を用いて利益を表すことにした。

（条件 1）　1 皿あたりの価格が $x$ 円のときの売り上げ数として①を用いる。

（条件 2）　材料は，①により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。

（条件 3）　1 皿あたりの材料費は 160 円である。たこ焼き用器具の賃貸料は 6000 円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を $y$ 円とおく。$y$ を $x$ の式で表すと

$y=-x^2+$ **エオカ** $x-$ **キ** $\times 10000$　……………②

である。

(3)　太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。②を用いて考えると，利益が最大になるのは 1 皿あたりの価格が **クケコ** 円のときであり，そのときの利益は **サシスセ** 円である。

(4)　花子さんは，利益を 7500 円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。②を用いて考えると，利益が 7500 円以上となる 1 皿あたりの価格のうち，最も安い価格は **ソタチ** 円となる。

3　総務省が実施している国勢調査では都道府県ごとの総人口が調べられており，その内訳として日本人人口と外国人人口が公表されている。また,外務省では旅券(パスポート）を取得した人数を都道府県ごとに公表している。加えて，文部科学省では都道府県ごとの小学校に在籍する児童数を公表している。

そこで，47 都道府県の，人口１万人あたりの外国人人口（以下，外国人数），人口１万人あたりの小学校児童数（以下，小学生数），また，日本人１万人あたりの旅券を取得した人数（以下，旅券取得者数）を，それぞれ計算した。

（次ページに続く。）

(1)　図 1 は，2010 年における 47 都道府県の，旅券取得者数(横軸)と小学生数(縦軸)の関係を黒丸で，また，旅券取得者数(横軸)と外国人数(縦軸)の関係を白丸で表した散布図である。

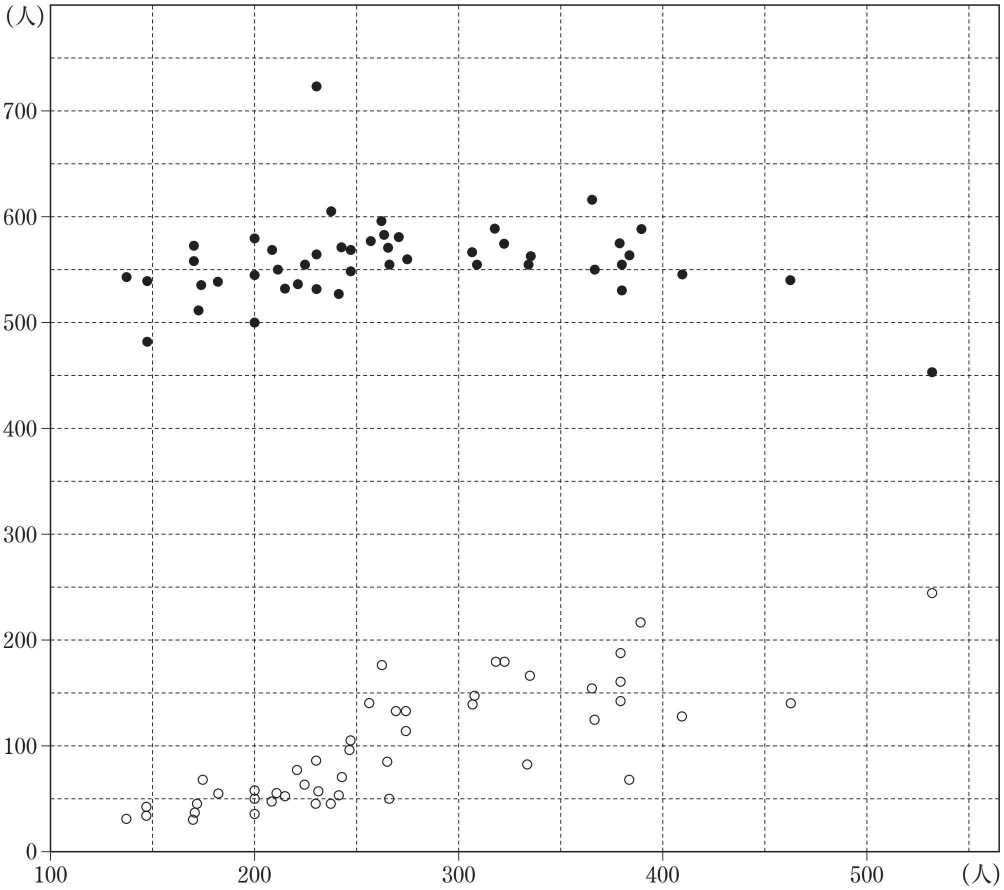



図 1　2010 年における，旅券取得者数と小学生数の散布図（黒丸），旅券取得者数と外国人数の散布図（白丸）
（出典：外務省，文部科学省および総務省の Web ページにより作成）

（次ページに続く。）

次の(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)は図1の散布図に関する記述である。

(Ⅰ)　小学生数の四分位範囲は，外国人数の四分位範囲より大きい。

(Ⅱ)　旅券取得者数の範囲は，外国人数の範囲より大きい。

(Ⅲ)　旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より大きい。

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは［ア］である。

［ア］の解答群

| | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (Ⅰ) | 正 | 正 | 正 | 正 | 誤 | 誤 | 誤 | 誤 |
| (Ⅱ) | 正 | 正 | 誤 | 誤 | 正 | 正 | 誤 | 誤 |
| (Ⅲ) | 正 | 誤 | 正 | 誤 | 正 | 誤 | 正 | 誤 |

（次ページに続く。）

(2)　一般に，度数分布表

| 階級値 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\cdots$ | $x_k$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 度数 | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $\cdots$ | $f_k$ | $n$ |

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots+x_kf_k)$$

で求めることができる。さらに階級の幅が一定で，その値が $h$ のときは

$$x_2=x_1+h,\ x_3=x_1+2h,\ x_4=x_1+3h,\ \cdots,\ x_k=x_1+(k-1)h$$

に注意すると

$\overline{x}=$ **イ**

と変形できる。

**イ** については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$\dfrac{x_1}{n}(f_1+f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

①　$\dfrac{h}{n}(f_1+2f_2+3f_3+4f_4+\cdots+kf_k)$

②　$x_1+\dfrac{h}{n}(f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

③　$x_1+\dfrac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots+(k-1)f_k\}$

④　$\dfrac{1}{2}(f_1+f_k)x_1-\dfrac{1}{2}(f_1+kf_k)$

（次ページに続く。）

図2は，2008年における47都道府県の旅券取得者数のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

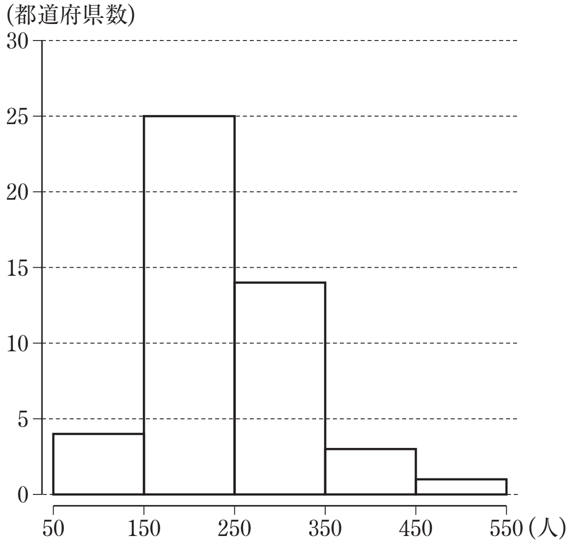



図2　2008年における旅券取得者数のヒストグラム
（出典：外務省のWebページにより作成）

図2のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定する。このとき，平均値 $\overline{x}$ は小数第1位を四捨五入すると **ウエオ** である。

（次ページに続く。）

(3)　一般に，度数分布表

| 階級値 | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_k$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| 度数 | $f_1$ | $f_2$ | $\cdots$ | $f_k$ | $n$ |

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，分散 $s^2$ は

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\}$$

で求めることができる。さらに $s^2$ は

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times\boxed{\text{カ}}+(\overline{x})^2\times\boxed{\text{キ}}\right\}$$

と変形できるので

$$s^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-\boxed{\text{ク}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である。

カ ～ ク の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⓪ $n$ | ① $n^2$ | ② $\overline{x}$ | ③ $n\overline{x}$ | ④ $2n\overline{x}$ |
| ⑤ $n^2\overline{x}$ | ⑥ $(\overline{x})^2$ | ⑦ $n(\overline{x})^2$ | ⑧ $2n(\overline{x})^2$ | ⑨ $3n(\overline{x})^2$ |

（次ページに続く。）

図3は，図2を再掲したヒストグラムである。

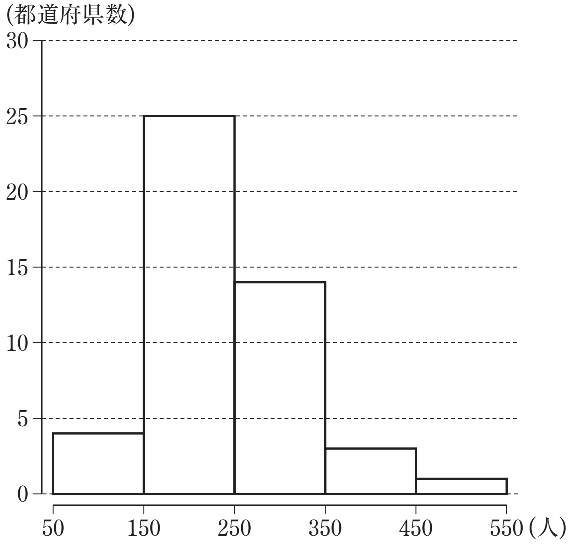


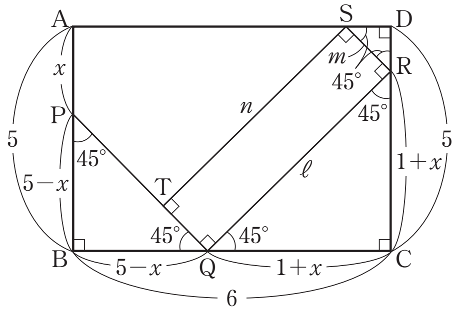

図3　2008年における旅券取得者数のヒストグラム
(出典：外務省のWebページにより作成)

図3のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は(2)で求めた［ウエオ］である。［ウエオ］の値と式①を用いると，分散 $s^2$ は［ケ］である。

［ケ］については，最も近いものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪　3900 | ①　4900 | ②　5900 | ③　6900 |
| ④　7900 | ⑤　8900 | ⑥　9900 | ⑦　10900 |

# 第２講　関数・データの分析




**1** (1)　AP$=x$（$\geqq 0$）とおく。

$a=6$ のとき　BP$=5-x$，BQ$=5-x$，

CQ$=6-(5-x)=1+x$，CR$=1+x$

$\ell$ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるのは

$0<$CR$<5$

つまり $0<1+x<5$ より $0\leqq x<4$ のときである。

このとき，DR$=5-(1+x)=4-x$ であるから，

四角形 QRST の面積 $S$ は

$S=$QR・SR$=\sqrt{2}$CQ・$\sqrt{2}$DR

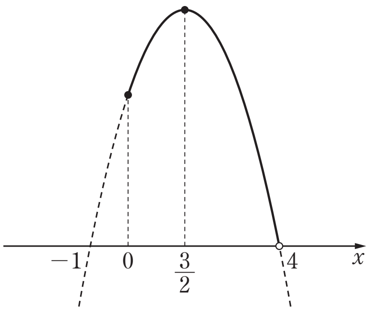
$=\sqrt{2}(1+x)\cdot\sqrt{2}(4-x)$

$=-2(x+1)(x-4)$

したがって，$S$ は $x=\dfrac{3}{2}$ のとき

最大値 $-2\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$

をとる。




$a=8$ のとき　CQ$=$CR$=3+x$

$0<$CR$<5$ より $0<3+x<5$　　$0\leqq x<2$

DR$=2-x$ より

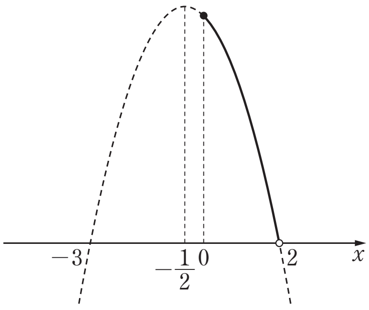
$S=\sqrt{2}(3+x)\cdot\sqrt{2}(2-x)$

$=-2(x+3)(x-2)$

したがって，$S$ は $x=0$ のとき

最大値 $-2\cdot 3\cdot(-2)=12$

をとる。




(2)　CQ$=$CR$=a-(5-x)=x+a-5$

$0<$CR$<5$ より $0<x+a-5<5$　　$0\leqq x<10-a$

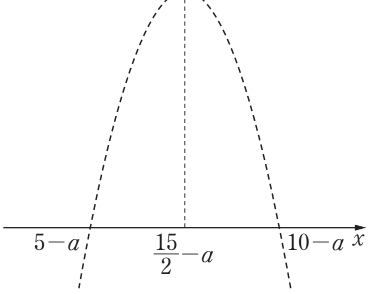
DR$=5-(x+a-5)=-x-a+10$　より

$S=\sqrt{2}(x+a-5)\cdot\sqrt{2}(-x-a+10)$

$=-2(x+a-5)(x+a-10)$

$=-2\{x+1+(a-6)\}\{x-4+(a-6)\}$

よってこのグラフは，$S=-2(x+1)(x-4)$ のグラフを $x$ 軸方向に $-a+6$ だけ平行移動したものであるから，




グラフの頂点の $y$ 座標は，(1)より $\dfrac{25}{2}$ である。

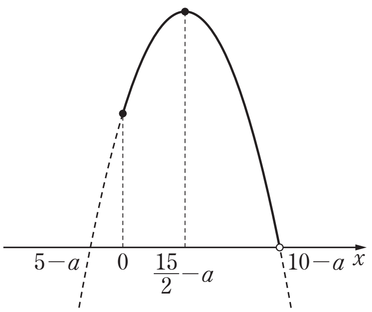
よって，$S=\dfrac{25}{2}$ となるのは，グラフの軸

$$x=\frac{(-a+5)+(-a+10)}{2}=\frac{15}{2}-a$$

が定義域 $0\leqq x<10-a$ に含まれる場合である。

したがって　$0\leqq\dfrac{15}{2}-a<10-a$

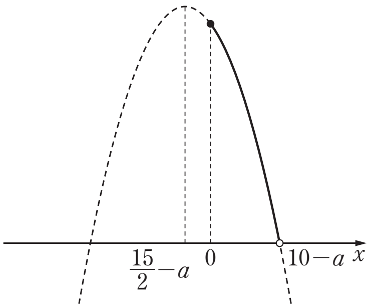
$5<a<10$ より　$5<a\leqq\dfrac{15}{2}$




$\dfrac{15}{2}<a<10$ を満たすとき，$S$ は $x=0$ のとき

最大値 $-2(a-5)(a-10)=-2a^2+30a-100$

をとる。




2 (1)　1皿あたりの価格を $x$ 円，売り上げ数を $s$ 皿とし，$s$ は $x$ の1次関数と仮定する。

$x$ が50増えると $s$ が50減るので，$s=\dfrac{-50}{50}x+b$ すなわち $s=-x+b$

と表される。

表より，$b=s+x=400$

したがって，売り上げ数 $s$ は

$s=-x+400=400-x$

(2)　(利益)＝(売り上げ金額)－(必要な経費)

(売り上げ金額)＝(1皿あたりの価格)×(売り上げ数)

(必要な経費)＝(器具の賃貸料)＋(材料費)

(材料費)＝(1皿あたりの材料費)×(売り上げ数)

よって

$$y=x(400-x)-\{6000+160(400-x)\}$$
$$=-x^2+560x-70000$$
$$=-x^2+560x-7\times10000$$

(3)　$y=-(x-280)^2+8400$ より，利益 $y$ が最大になるのは1皿あたりの価格が

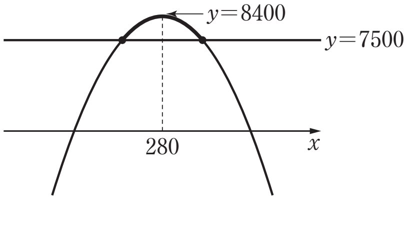
$x=280$ (円) のときであり，そのときの利益は $y=8400$ (円) である。

(4)　利益が7500円以上より，$y\geqq7500$

$-(x-280)^2+8400\geqq7500$

$(x-280)^2\leqq900$

$-30\leqq x-280\leqq30$　　よって　$250\leqq x\leqq310$



したがって，利益が7500円以上となる1皿あたりの価格のうち，最も安い価格は
$x=250$ (円)

**3** (1) (Ⅰ)について

四分位範囲は第3四分位数(人数の多い方から12番目の県の人数)から第1四分位数(人数の少ない方から12番目の県の人数)を引いたものである。

縦軸から黒丸および白丸の表す人数を読み取ると，小学生数の四分位範囲は外国人数の四分位範囲より小さい。よって，誤り。

(Ⅱ)について

横軸から読み取ると，旅券取得者数の範囲は概算で $530-130=400$ (人)

白丸の縦軸から読み取ると，外国人数の範囲は概算で $250-30=220$ (人)

よって，旅券取得者数の範囲は外国人数の範囲より大きい。よって，正しい。

(Ⅲ)について

白丸の分布の様子を見ると右上がりの傾向，つまり正の相関が見られる一方，黒丸の分布には傾向が見られない。よって，旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より小さい。よって，誤り。

以上より，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは　(⑤)

(2)
$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots\cdots+x_kf_k)$$
$$=\frac{1}{n}[x_1f_1+(x_1+h)f_2+(x_1+2h)f_3+(x_1+3h)f_4+\cdots\cdots+\{x_1+(k-1)h\}f_k]$$
$$=\frac{1}{n}[x_1(f_1+f_2+f_3+f_4+\cdots\cdots+f_k)+h\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}]$$
$$=\frac{1}{n}\cdot x_1\cdot n+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$$
$$=x_1+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}\quad (③)$$

図2のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，階級値およびその値を取る度数は次の表となる。

| 階級値 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 度数 | 4 | 25 | 14 | 3 | 1 | 47 |

$$\bar{x}=x_1+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$$
$$=100+\frac{100}{47}(25+2\cdot 14+3\cdot 3+4\cdot 1)$$
$$=100+\frac{6600}{47}$$
$$=240.4\cdots\cdots$$

小数第1位を四捨五入すると，求める平均値 $\bar{x}$ は240

(3)　$s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\}$

$=\dfrac{1}{n}[\{x_1{}^2-2x_1\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_1+\{x_2{}^2-2x_2\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_2+\cdots\cdots$

$+\{x_k{}^2-2x_k\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_k]$

$=\dfrac{1}{n}\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots\cdots+x_kf_k)$

$+(\overline{x})^2\times(f_1+f_2+\cdots\cdots+f_k)\}$

$=\dfrac{1}{n}\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times n\overline{x}+(\overline{x})^2\times n\}$

（③）　（⓪）

$=\dfrac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-(\overline{x})^2$　（⑥）

図３（図２）のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，(2)より $\overline{x}=240$ であり，分散 $s^2$ は

$s^2=\dfrac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-(\overline{x})^2$

$=\dfrac{1}{47}(100^2\cdot4+200^2\cdot25+300^2\cdot14+400^2\cdot3+500^2\cdot1)-240^2$

$=\dfrac{100^2}{47}(4+100+126+48+25)-240^2$

$=\dfrac{100^2}{47}\cdot303-240^2$

$=6868.0\cdots\cdots$

この値に最も近いものは，6900　（③）